Construtivismo e educação matemática *

Luís Moreno Armella, Guillermina Waldegg

México, 1992

1 O papel da epistemologia na prática educativa

Cada vez são mais os autores que reconhecem explicitamente o facto de que as posições filosóficas e as teorias epistemológicas relativas ao conhecimento matemático exercem uma influência determinante sobre a educação matemática.
Entendemos "Educação Matemática" em sentido amplo, quer dizer, não só referida ao trabalho que o professor realiza na sala de aula, mas também a todos os outros factores que intervêm e tornam possível que a matemática se ensine e se aprenda; factores esses tais como a concepção e o desenvolvimento de planos e programas de estudo, os livros de texto, as metodologias de ensino, as teorias de aprendizagem, ou mesmo a construção de marcos teóricos para a investigação educativa.
O actor, ou os actores, que intervêm para dar corpo aos factores atrás mencionados, fazem-no, explícita ou implicitamente, a partir das suas convicções filosóficas e epistemológicas relativamente à matemática. Quer dizer, as concepções que eles têm — seja individualmente ou como grupo ou corrente— sobre "o que é a matemática" e sobre "o que é o conhecimento matemático" embebem os elementos que conformam os processos de ensino e aprendizagem da matemática.
Intuicionismo, formalismo, logicismo, construtivismo, empirismo, estruturalismo e demais "ismos" tiveram, cada um em seu tempo, uma influência

*Educácion Matemática (2), vol. 4, México, 1992, pp. 7-15

significativa — ainda que nem sempre explícita — na formação das ideias e na demarcação dos princípios que regem a educação matemática.
Não quer isto dizer que todos os profissionais da educação matemática estejam "inscritos" em alguma das escolas filosóficas. Em muitos casos, trata-se, simplesmente, das opções "particulares" do professor, do autor de textos, do profissional que concebe os planos e programas ou do investigador, acerca da natureza da matemática e do conhecimento matemático, e às suas convicções sobre como estas se relacionam com o trabalho docente e o ensino e com a aprendizagem dos estudantes. Frequentemente, estas opiniões foram adquiridas de forma indirecta ou herdadas na sua formação; porém, há também muitos casos também em que obedecem a modas ou tendências de correntes internacionais que podem ser até incompatíveis com as adquiridas pela formação.
Considerado este ponto de vista, é pertinente colocar as seguintes questões:
A que didáctica nos leva uma determinada concepção da matemática e do conhecimento matemático?
A que concepções da matemática e do conhecimento matemático obedece uma determinada prática educativa?
Daremos de seguida alguns elementos de análise que nos permitam dar algumas respostas, comparando duas maneiras distintas de conceber a matemática.

2 Um breve esboço histórico

A epistemologia é uma disciplina cujo objecto de estudo é o conhecimento científico, a sua construção, a sua estruturação em teorias, as bases sobre que assentam, a sua natureza, o seu alcance.. Ainda que originalmente a epistemologia era considerada um ramo da filosofia, na actualidade há abordagens que apontam para a sua autonomia e independência.
Os filósofos pré-socráticos, os primeiros filósofos da tradição ocidental, não deram especial atenção aos assuntos da epistemologia; os seus interesses centravam-se na natureza e nas possibilidades de mudança. Nas suas reflexões davam por adquirido ou certo que era possível o conhecimento da realidade, com pequenas variantes que tinham a ver com a ideia de que o conhecimento poderia obter-se melhor a partir de umas fontes que de outras. Heráclito, por exemplo, dava especial ênfase à importância dos sentidos para conhecer a realidade, enquanto que Parménides privilegiava o papel da razão. O que é certo que nenhum deles algum dia duvidou que fosse possível o con-

hecimento da realidade. A partir do século quinto antes de Cristo começaram a surgir dúvidas e foram os sofistas os principais responsáveis por isso.
Durante o século quinto antes de Cristo, as instituições e as práticas humanas enfrentaram, pela primeira vez na sua história, um exame crítico. Muitas coisas que tinham sido pensadas como parte da natureza, começaram a separar-se dela. As perguntas epistemológicas centrais que preocupavam os sofistas eram do tipo: Que parte do que pensamos e do que conhecemos é objectivamente parte da natureza e que parte é que é contribuição humana? Até que ponto podemos estar seguros que obtemos um conhecimento através dos sentidos? A razão pode produzir conhecimento?
Alguns foram mesmo mais radicais afirmando que não há a realidade e que se ela existisse, não a podíamos conhecer e que, mesmo que a conhecessemos, não poderíamos comunicar o nosso conhecimento a seu respeito.
É a este cepticismo geral que se deve o aparecimento da epistemologia tal como foi conhecida tradicionalmente: a busca da justificação de que o conhecimento é possível e para estabelecer quais parcelas da aquisição do conhecimento se devem ao papel dos sentidos e quais se devem à razão. É Platão quem é considerado o verdadeiro fundador da epistemologia, por ter sido ele quem primeiro tentou sistematicamente explicar as questões básicas desta disciplina: O que é o conhecimento? Em que é que fundamenta e quanto do que pensamos conhecer é realmente conhecimento? Há conhecimento através dos sentidos? Pode produzir-se conhecimento através da razão?

3 A matemática como objecto de ensino

Durante este século e até há pouco tempo, a concepção filosófica dominante sobre a matemática foi formalista, que a *grosso modo*, nos apresenta esta disciplina como um *corpo estruturado* de conhecimentos, corpo constituido e conformado pelos objectos matemáticos, as relações entre eles e os critérios para validar resultados dentro de um referencial axiomático-dedutivo. O formalismo exige extirpar o significado dos objectos a fim de trabalhar exclusivamente com as "formas" e com as relações entre esses objectos que derivam da base axiomática das teorias. A actividade matemática produto desta concepção foi muiot frutífera, basta observar a grande quantidade de resultados conseguidos no presente século. Já o mesmo não se pode dizer da prática dedutiva que se deriva de uma concepção formalista da matemática. No que respeita à epistemologia da matemática que domina o "ensino tradicional",

tem raízes históricas muito longínquas que remontam à antiga Grécia.
Para Platão, os objectos amtemáticos, assim como as relações entre eles, têm uma realidade, externa e independente de quem conhece, no mmundo das ideias. Conhecer para Platão significa reconhecer, transferir este corpo de objectos e relações preexistentes num mundo exterior e implantá-los no intelecto do indivíduo. A tese fundamenal desta postura epistemológica — que chamaremos realismo matemático — é a separação explícita entre o sujeito cognoscente e o objecto de conhecimento.
Este realismo epistemológico foi modificado por Aristóteles que de um modo empírico, ao transferir os objectos matemáticos do mundo das ideias de Platão para uma natureza material: a partir dele, conhecer significa reconhecer os objectos matemáticos — mediante processos de abstracção e generalização — nos objectos corpóreos da natureza.
Ambas as concepções — a idealista de Platão e a empírica de Aristóteles — partem da mesma premissa fundamental de que os objectos da matemática e as suas relações estão dados, sem que a sua existência dependa do sujeito que conhece, já que a eles preexsistem.
Sob esta concepção, a matemática pode ser vista como um "objecto de ensino": o matemático descobre a matemática numa realidade externa a ele, mas após a descoberta de um resultado matemático é necessário jsutificá-lo dentro de uma estrutura formal e só então fica pronto para ser ensinado. Esta concepção epistemológica, uma espécie de simbiose de formalismo, encaixa dentro da oposição formulada pelo empirismo lógico do século XX, *contexto de descoberta/contexto de justificação*: o realismo sobrestima o contexto da descoberta enquanto que o formalismo nos dá o contexto de justificação.

4 A transmissão de conhecimento

Considerando que a matemática é um "objecto de ensino", esta pode transmitir-se. Quem detem o conhecimento pode oferecê-lo a quem o não possui [1], sem risco de que o conhecimento se modifique no processo de transmissão.
A tarefa do professor consistirá em "injectar" o conhecimento na mente do estudante através de um discurso adequado. Pelo seu lado, o estudante não pode modificar a estrutura do discurso, compete-lhe descodificá-lo. A didáctica, deste ponto de vista, procura optimizar a tarefa do professor

[1] dar um curso ou dar um curso são expressões reminiscentes desta concepção

através de combinações de conteúdos, geralmente apoiadas em preceitos unversais — como sejam ir do simples para o complexo, do particular ao geral, do concreto ao abstracto, da análise à síntese — e pondo especial ênfase no contexto da justificação, como estado superior do conhecimento.
Deste ponto de vista, a avaliação da aprendizagem fica definida de modo muito claro: os conteúdos que o professor trasnmite univocamente pelo seu discurso, serão perguntados ao estudante que deverá responder com um discurso análogo ao do professor. Mesmo reconhecendo diferenças entre os estudantes (de inteligência, de atitude, de motivação), estas diferenças ficam esbatidas perante a exigência de respostas únicas e universais, centradas no contexto da justificação.
Contra um formalismo exacerbado na educação matemática, como o que dominou os anos cinquenta, houve reacções significativas: daqueles que admitem algum trabalho heurístico prévio à formalização, em particular por parte dos defensores da denominada pedagogia da descoberta brilhantemente impulsionada por Polya [2]. Sem dúvida, esta pedagogia não conseguiu escaparse de uma concepção realista, calramente explicitada na ideia de que a matemática "se descobre", isto é, preexiste algures.
Outras teorias da aprendizagem, desenvolvidas recentemente, propiciaram a introdução de inovações na didáctica que se propunham optimizar o processo de "transmissão e aquisição" do conhecimento. Por exemplo, as didácticas baseadas nas teorias do comportamento (ou de conduta), que atingiram o seu auge na década de setenta, propunham uma série de técnicas — máquinas de ensino, textos programados, programação por objectivos, etc — no pressuposto de que a aprendizagem consiste na modificação de certos comportamentos observáveis, provocada por um programa de ensino baseado no binómio estímulo-reforço. Estas teorias comportamentalistas também não conseguiram ou não quiseram escapar de uma visão ou concepção realista da matemática; por trás da tecnologia educativa delas derivada, está a ideia de que o conhecimento é uma espécie de pacote que se transmite e se adquire tanto melhores quanto melhores sejam os veículos que o transportam. [3]
A conjunção realismo–formalismo dominou a educação matemática todo este século: está subjacente à maioria dos textos e dos planos de estudos de todos os níveis escolares, à actividade de imensos professores, aos métodos de

[2] Veja-se, por exemplo, POLYA, *Mathematical Discovery*, Wiley, New York:1962

[3] A expressão "processo de ensino-aprenizagem" usada indiscriminadamente na actualidade, provem destas teorias: há um processo único em cujos extremos estão o ensino e a aprendizagem que, em termos gerais, são uma mesma coisa

avaliação e classificação e a muitos dos trabalhos de investigação educaional. Apesar de todo esse investimento, os resultados não foram satisfatórios: o sentimento de fracasso dos professores e estudantes parece não ter parado de aumentar. Parece, pois, necessário rever as hipóteses (implícitas e explícitas) sobre que se apoiam os nossos esforços.
A primeira pergunta ao ver o esquema tradicional:

$$\text{Professor} \; - - - \overset{\textit{Conhecimento}}{- - - - -} - - \longrightarrow \text{Aluno}$$

é "o que é o conhecimento?" Não ser tão fácil de transmitir talvez se deva a que o conhecimento não seja algo que possa simplesmente transmitir-se, talvez porque o professor não o tenha "feito" para consumo dos seus alunos e seja antes alguma coisa que estes construam. Esta é a tese das epistemologias construtivistas que tratamos a seguir.

5 A matemática como objecto de aprendizagem

Uma mudança fundamental na tese do realismo matemático apareceu com a *Crítica da Razão Pura* de Immanuel Kant (1724–1804), em que de maneira brilhante é questionada a "objectividade" do conhecimento, sem cair na armadilha da consciência que o racionalismo cartesiano tinha imposto. A tese kantiana postula que quando o sujeito cognoscente se aproxima do objecto de conhecimento (seja este material ou ideal), fá-lo a partir de certos pressupostos teóricos, de tal modo que o conhecimento é o resultado de um processo dialéctico entre o sujeito e o objecto, em que ambos se transformam sucessivamente. *Conhecer*, para Kant, significa **criar** a partir de dados apriorísticos, que permitem ao sujeito determinar os objectos em termos do próprio conhecimento e não, como supunham os filósofos gregos, o conhecimento em termos dos objectos. [4]

[4]Numa formulação célebre, Kant, no prólogo da segunda edição da *Crítica da razão Pura*, deu um novo significado à experiência para a indagação científica. Entenderam [os homens de ciência] que a razão só reconhece o que ela mesma produz, que a razão tem que antecipar-se com os princípios dos seus juízos de acordo com leis constantes e que que tem que obrigar a natureza a responder às suas perguntas... Ao contrário, as observações fortuitas e realizadas sem um plano prévio não estão ligadas a qualquer lei necessária,

A concepção epistemológica de Kant serve como ponto de partida — ainda que as teorias posteriores sejam substancialmente diferentes — para as reformulações construtivistas da actualidade. De modo notável, Jean Piaget estabelece a sua Epistemologia Genética na base de que o conhecimento se constrói através da actividade do sujeito sobre os objectos. Os objectos matemáticos não habitam um mundo eterno e externo a quem conhece, mas são antes produzidos, construídos pelo próprio sujeito num processo contínuo de assimilações e adequaçõess que ocorre nas suas estruturas cognitivas.
Para Piaget (e, em essência, para todos os construtivistas), o sujeito abeira-se do objecto do conhecimento dotado de certas estruturas intelectuais que lhe permitem "ver" o objecto de certo modo e extrair dele determinada informação, que é assimilada por essas estruturas. A nova informação produz modificações – adequações – nas estruturas intelectuais, de tal modo que quando o sujeito se debruça novamente sobre o objecto vai vê-lo de maneira distinta daquela como o tinha visto originalmente sendo que agora já é outra infomração que é relevante. As suas observações modificam-se sucessivamente conforme o fazem as suas estruturas cognitivas, construindo-se assim o conhecimento sobre o objecto.
De uma forma ou doutra, o propósito de todas as epistemologias foi a análise das relações entre o sujeito cognoscente e o objecto do conhecimento e a forma como se gera o conhecimento através dessa interacção. O modelo de ensino tradicional — baseado no realismo matemático — que descrevemos, privilegia o objecto do conhecimento e atribui um papel passivo ao sujeito. Na perspectiva construtivista, é a actividade do sujeito que é primordial: não há "objecto de ensino" mas sim "objecto de aprendizagem".

6 A construção do conhecimento

Os diversos estudos relativos à forma como os estudantes resolvem problemas matemáticos, conduziram a uma explicação de matriz construtivista, de que a estrutura da actividade de resolução de problemas surge como um objecto cognitivo (um esquema) a partir da reflexão que o sujeito faz sobre as suas próprias acções. O "conhecimento mate4mático", para a epistemologia

lei que, de qualquer modo, a razão procura e lhe é necessária. A razão deve abordar a natureza levando numa mão os princípios segundo os quais só podem considerar-se como leis os fenómenos concordantes, e na outra a experiência que tenha projectado à luz de tais princípios..."

genética, é reultado desta reflexão sobre acções interiorizadas — a abstracção reflexiva —. A matemática não é um corpo codificado de conhecimentos (assim como uma língua não é o texto do seu ensino), mas essencialmente uma actividade.
O conhecimento, na perspectiva construtivista, é sempre contextualizado e nunca separado do sujeito; no processo de conhecer, o sujeito vai atribuindo ao objecto uma série de significados, cuja multiplicidade determina conceptualmente o objecto. Conhecer é actuar, mas conhecer também implica compreender de tal modo que permita partilhar com outros o conhecimento e formar nesse passo uma comunidade. Nesta interacção, de natureza social, a negociação de significados joga um papel fundamental.
Uma tese fundamental da teoria piagetiana é a de que todo o acto intelectual se constrói progressivamente a partir de estruturas cognitivas anteriores e mais primitivas.. A tarefa do educador construtivista, muito mais complexa que a do seu colega tradicional, consistirá então em esboçar e apresentar situações que, fazendo apelo às estruturas anteriores de que o estudante dispoe, lhe permitam assimilar e conformar-se a novos significados do objecto de aprendizagem e novas operações associadas a ele. O passo seguinte consistirá em socializar estes significados pessoais através de uma negociação com outros estudantes, com o professor, com os textos.
Ao pôr a ênfase na actividade do estudante, uma didáctica baseada nas teorias construtivistas exige também uma maior actividade da parte do educador. Esta já nãos e limita a tomar conhecimento de um texto e expô-lo na aula, ou numas notas, ou njoutro texto, com maior ou menor habilidade. A actividade que esta concepção exige é menos rotineira, em muitas ocasiões imprevisível, e exige do educador uma criatividade constante.

7 Temporalidade e viabilidade do conhecimento

Se a matemática fosse um corpo codificado de conhecimentos — e portanto um "objecto de ensino", como o definimos anteriormente — então a matemática seria composta de verdades intemporais e a história nos teria legado esse corpo.
Não há dúvida de que as ciências naturais evoluíram e que, nessa evolução, ocorreu uma mudança nas suas asserções normativas, quer dizer, na forma como se concebem e validam os resultados. São exemplos desta evolução a revolução copérnica, a revolução darwiniana do século dezanove e, no século

vinte, as revoluções relativista e quântica. E na matemática terá havido alguma mudança equivalente?
Hermann Hankel, matemático notável do século XIX, disse certa vez que na maioria das ciências, uma geração desfaz o que a geração precedente fez, e que só em matemática cada geração constrói uma nova história sobre a velha estrutura [5]. A epistemologia genética, através do seu método histórico-crítico (que considera a história como um "laboratório epistemológico" no qual se ratificam ou rectificam certas hipóteses) invalida — parcialmente — este ponto de vista e mostra que há mudanças no desenvolvimento da matemática que não correspondem a uma emra acumulação de novas "descobertas". Como resultado destas mudanças, a comunidade matemática, vista como sujeito cognoscente, cria na sua actividade uma nova semântica, uma nova maneira de "ver" os objectos e a própria disciplina.
Tomemos, por exemplo, a axiomatização da geometria euclidiana na Grécia antiga. Essa axiomatização transformou a actividade matemática empírica, tal como se fazia no Egipto e Mesopotâmia, numa actividade teórica. Os resultados geométricos e aritméticos encontrados a partir de múltiplas observações — medições e sistematizações de tentativa e erro — por egípcios e babilónicos, foram concebidos pelos gregos como conceitos abstractgos, cujo tratamento requeria um marco metodológico e conceptual diferente.
Apesar disso, a criação (que não a descoberta) das geometrias não euclidianas e das álgebras não comutativas durante o século XIX, transformou a actividade matemática numa actividade sobre o possível, já não sobre o necessário. Quer isto dizer que a ideia — predominante em dado momento — de que existe um único modelo matemático para descrever a realidade física única, foi despromovida perante a evidência de certos modelos, igualmente coerentes e válidos dentro da estrutura matemática, que não pareciam descrever o mundo físico. O modelo tradicional abandonou o seu carácter de absoluta necessidade e apareceu como um modelo entre outros possíveis.
De acordo com a interpretação construtivista, tudo isto permite mudar as concepções da comunidade matemática (sujeito cognoscente) sobre a disciplina: a matemática é reconhecida como uma actividade essencialmente abstracta, em que a abstracção reflexiva é o eixo da actividade, e a interiorização das acções é o seu ponto de partida.
Estes exemplos da história levam-nos a sustentar que o conhecimento matemático

[5]Citado por Grabiner, J.V. em *Is Mathematical Truth Time-Dependent?*, American Mathematical Monthly, 81 (1974), pp. 354-365

é sempre contextualizado: como actividade de uma sociedade, a matemática não desligar-se do seu condicionamento histórico. Consideremos, para reforçar esta ideia, a evolução histórica da noção de axioma (ou postulado). Esta noção, associada às formas de "ver", à normatividade da disciplina [6], experimentou muitas mudanças ao longo da história. Na matemática euclideana, um postulado exprime uma *verdade* evidente por si mesma. Realçámos a palavra "verdade" para fazer notar o conteúdo semântico da axiomática grega, em oposição ao sistema hilbertiano em que os postulados não se referem a verdades, mas a relações entre os conceitos envolvidos. Retirar o conteúdo semântico de um sistema axiomático é o culminar de um longo processo de análise sobre a axiomática euclideana, desenvolvido em torno do postulado das paralelas, que mostra claramente a mudança na normatividade que subjaz à própria evolução da disciplina.

Deste desenvolvimento da matemática depreende-se que o conhecimento matemático não é necessariamente "verdadeiro": melhor diremos que é viável no sentido de que se "ajusta" à experiência. Esclareçamos isto com um exemplo: os esquemas que uma pessoa desenvolve para conduzir um automóvel podem ser diferentes dos desenvolvidos por outra pessoa para o mesmo fim. E não tem qualquer sentido considerar que uns são mais verdadeiros que os outros; só tem sentido perguntar quais dos esquemas de condução são mais adequados às condições a que essas pessoas vão estar sujeitas. Diremos, em conseuqência, que uma certa forma de condução é mais viável que outra, que uma destas pessoas construiu uma fomra de condução viável. Esta é uma forma de conhecimento viável relativamente à experiência pertinente.

A concepção educativa enraízada nas modalidades do formalismo matemático a que temos aludido, não só concebe o conheciemnto matemático como um corpo de conhecimentos que antecedem o estudante, mas que além disso transfere uma normatividade da matemática para o processo de avaliação da aprendizagem. O estudante deve assimilar o conhecimento que lhe é transmitido e simultaneamente deve desenvolver um comportamento cognitivo conforme à normatividade da disciplina matemática. Este grau de exigência esquece que a normatividade de uma ciência é consubstancial ao processo histórico do seu desenvolvimento. A temporalidade das "verdades" matemáticas apoia esta posição. Os critérios normativos não lhe podem ser

[6] Falamos de normatividade e não de critérios de justificação porque a forma de validar é consubstancial à natureza dos objectos matemáticos, natureza vinculada organicamente à forma da actividade do sujeito

impostos do exterior de uma ciência. O risco de fazer isso, em didáctica, consiste em impor um processo lógico — a justificação — a um processo cognitivo do conhecimento — a construção do conheciemnto matemático —. Este último tem a sua própria lógica.

8 A construção do significado

O núcleo da actividade construtiva por parte do estudante consiste em construir significados associados à sua própria experiência, incluindo a sua experiência linguística. A socialização deste processo consiste na negociação desses significados numa comunidade — a sala de aula — que tenha tomado como seu o processo construtivo. A sensação de objectividade que se depreende do processo negocial induz a convicção de que este conheciemnto preexiste à comunidade que se dedica à sua construção. É necessário analisar com cuidado as relações entre matemática e linguagem. Este último é um campo de experimentação para o estudante.

Para o construtivismo, é importante distinguir entre "concepções" e "conceitos" [7] Estes termos empregam-se com um sentido próximo ao que Freudenthal chama "objectos mentais" e "objectos formais" [8]. A experiência do estudante, seu ponto de partida, é uma rede de informações, de imagens, de relações, de antecipações e inferências em torno de uma ideia. Este complexo cognitivo é aquilo a que chamamos a sua concepção. O trabalho do estudante consiste então em extrair dessa concepção relações e regularidades: um conjunto de coordenado de acções e esquemas que conduzem ao conhecimento viável, aos conceitos e à geração de algoritmos. O processo de construção de significados é gradual, em virtude do conceito estar, por assim dizer, preso a uma rede de significados.

Ao longo do processo construtivo — que é permanente — o estudante encontra situações que questionam o "estado" actual do seu conhecimento e o obrigam a um processo de reorganização; com frequência o estudante vê-se obrigado a recusar, por inviável, muiot do que já tinha construído.

Durante o processo de construção de significados, o estudante vê-se forçado a

[7] Veja-se, por exemplo, SFARD, ANNA: *On the dual nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processer and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies, **22** pp 1-36, 1991.

[8] FREUDENTHAL, H.: *Didactical Phenomenology of mathematical structures*, Holanda, Ridel, 1983

recorrer a noções mais primitivas que expliquem a situação em estudo. Esta situação é análoga ao desenvolvimento de uma ciência durante a procura dos seus princípios. Na física, por exemplo, o estudo das leis gerais do movimento conduziu à formulação da lei da inércia; em amtemática, o estudo da geometria conduziu primeiro a organizações localizadas e, posteriormente, à axiomática de Euclides [9]. Claro que isto não é mais do que uma analogia: o estudante não busca conscientemente esquemas lógicos. Antes está a tentar dar um sentido a aquilo que vai tendo de enfrentar. Esta bsuca de sentido é uma necessidade cognitiva, porque a matemática se desenvolve num cenário ideal. Os termos "conjunto", "função", etc, correspondem a experiências mentais. É impossível deixar de reconhecer o papel central da abstraçcção reflexiva, como mecanismo que dá lugar às experiências do mundo matemático.
As ciências naturais dão conta de fenómenos que se observam — sempre a partir de uma interpretação preliminar por parte do sujeito — no mundo material; a matemática, pelo seu lado, dá conta da estrutura de um mundo ideal, cuja "matéria prima" são as acções interiorizadas do sujeito. É necessário o emprego de uma linguagem formal para falar deste mundo ideal. Na versão da didáctica derivada do formalismo, existe a para identificar os objectos da matemática (que são objectos epistémicos pois constituem o nosso saber) com os nomes que usamos para nos referirmos a tais objectos em linguagem formal. Deste modo, a realidade epistémica permanece oculta; porém a necessidade de construir um sentido trá-la de volta. Porquê não aproveitar plenamente esta situação iniludível?

9 Concretização e representação

Já aludimos à sensação de concretização que costuma acompanhar os objetos mnatemáticos quando cedemos ao impuslo de os identificar com os termos da linguagem formal que os designam . Levando em conta que a linguagem antural e as linguagens formais são parte da experiência do sujeito — o sujeito possui um impulso simbólico — fica no ar a pergunta:
Em que sentido os objectos amtemáticos são abstractos?
Por via da lingugem formal (simbólica) opera-se uma mudança no plano de representação que, em primeira instância, permite explicar que as acções,

[9]Veja-se Bromberg, S. Moreno, L. *Tres hitos en la historia de la fundamentación de la geometria.* Mathesis, Vol. VI, Nº 3, pp. 281-306, Agosto, 1990

que no plano material se realizam com objectos concretos, no plano ideal sed realizam com símbolos. Parece depreender-se daqui um critério sobre o grau de abstracção dos objectos da matemática: a abstracção é o resultado de uma mudança ao nível da representação.

Os objectos da matemática manipulam-se, operam-se ao nível do simbólico; estas acções no nível simbólico permitem ir gerando uma rede de relações entre diversos objectos. Ao passar a um novo nível de representação, vai-se mesmo até às próprias estruturas pela via da organização das acções interobjectos. As sucessivas fases no percurso do concreto ao abstracto, estão substancialmente dependentes ou vinculadas às possibilidades de gerar relações e estruturas a partir da operação dos objectos matemáticos.

Na medida em que operamos tais objectos, aumenta a rede de significados a eles vinculados e daí o grau de objectividade com que aparecem nas nossas estruturas cognitivas. Noutros termos: tais objectos tornaram-se mais concretos para nós. Por isso, os critérios que referem o grau de concretização de uma ideia — de um referente conceptual — ao número de objectos materiais que consigamos associar-lhe, sem ter em conta a actividade operatória, são insuficientes. É este o ponto de vista da didáctica a que subjaz uma "ontologia realista" que pretende que os objectos matemáticos existem em si mesmos; que se trata de ir descobrindo as suas características até que o estudante os capte "na sua verdadeira natureza", a abstracta, desvinculada do real. Não parece necessário insistir, nestas alturas, sobre os equívocos deste ponto de vista. O que mais é preciso é reconhecer a natureza dual, simbólica e operatória que torna concretos os objectos matemáticos. Que permite a actividade básica do estudante: utilizar os diversos níveis de representação para a construção do sentido.

.